Ting man burde kunne

Matriser:

Multiplikasjon

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2j} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{ij} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1j} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{i1} \end{bmatrix} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + a_{1j} * b_{i1}$$

Determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

= 1*((3*1)-(2*(-4))) – 3*((1*1)-(2*3)) – 4 ((1*(-4))-(3*3))
= 11 + 15 + 52 = 78.

Likninger

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 2z \\ 2x & 4y & -3z \\ 3x & 6y & -5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

Sette parameter:

$$\begin{array}{lll} x_1 & 3x_4 & = -4 \\ \quad x_2 & 2x_4 & = 1 \\ \quad\quad x_3 & 6x_4 & = 2 \end{array}$$

$x_4 = s$
$x_1 = -4 - 3s$
$x_2 = 1 - 2s$
$x_3 = 2 - 6s$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -4-3s \\ 1-2s \\ 2-6s \\ s \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

Cramers regel

Hvis vi har et likningssystem med n likninger og n ukjente med utvidet matrise [A b] der det(A) ≠ 0, så har likningssystemet nøyaktig en løsning. Denne løsningen er gitt ved $x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots x_n \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$

Der A_j er matrisen vi får ved å erstatte kolonne j i A med b.

::Eksempel:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 & = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 & = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 & = 0 \end{cases}$$

Den utvidede matrisen er altså: og determinanten til A er

$$[A\,b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

Så ved teorem 3.10:
Hvis Det(A) ≠ 0, har likningssystemet nøyaktig én løsning.
Hvis Det(A) = 0, har likningssystemet enten 0 eller ∞ løsninger.
Vi har nøyaktig én løsning, altså gir Cramers regel oss:

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1,\ x_2 = \frac{det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2,$$

$x_3 = \frac{det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3}{-1} = 3$. Jævlig grei måte å løse saker på.

Tallfølger:

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ er tallfølgen $x_1, x_2, \dots, x_n$
{7} = 7,7,7... er en konstant følge
$\{-1^n\} = 1, -1, 1$ er en alternerende følge
$\{x_n\}$ konvergerer mot x hvis leddene nærmer seg X når n går mot uendelig. Da skriver vi $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Hvis dette ikke skjer,

Differenslikninger:

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \ , n \geq 0$
Antall etter to perioder (n+2) er forrige periode og den før der, fordi de har fått barn. x_n er altså ikke x_n, men barna deres.
$x_2 = x_1 + x_0 = 1 + 1 = 2$
$x_3 = x_2 + x_1 = 2 + 1 = 3$
$x_4 = x_3 + x_2 = 3 + 2 = 5$
8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...
$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$
Det var Fibonacci-følgen.

$x_{n+1} = 3x_n^2 - n + 1 \ , n \geq 0$
Er en **førsteordens differenslikning**
Gitt en initialverdi, $x_0 = 1$, kan vi finne $x_1 = 3*1^2 - 0 + 1 = 4$, fordi n=0
Lineære differenslikninger er viktige. Def.:
La $k \epsilon \mathbb{N}$. En k-te ordens lineær differenslikning (med konstante koeffisienter), er en likning på formen:
$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_k x_n + f(n), \ \ n \geq 0$,
Der $a_1,\dots,a_k$ er relle tall, f(n) er et gitt uttrykk i n og $a_k \neq 0$ (ellers ville likningen ha hatt lavere orden).
For å løse en differenslikning finner vi alle følgene som oppfyller likningen. Disse tallfølgene utgjør den generelle løsningen til differenslikningen.
Eks. $x_{n+1} = 5x_n, n \geq 0$ har uendelig mange løsninger. Vi vil ha den generelle. Denne er alle følger $\{x_n\}$ slik at
$x_n = C5^n, C\epsilon\mathbb{R}$.
$x_{n+1} = 5x_n, \ x_0 = 2$ er en førsteordens lineær differenslikning med én initialbetingelse, og følgen $\{x_n\} = 2,10,50, \dots, 2 * 5^n$ er den eneste løsningen til denne likningen.

Anvendelse:

(leddet x_n svarer til n-te generasjon)

Førsteordens lineære differenslikninger:

Homogene:
Er på formen $x_{n+1} = rx_n, \ \ n \geq 0$
$x_{n+1} = 2x_n, \ \ n \geq 0, x_0 = 1$ gir 1,2,4,8,16,32,64...
LØSNINGSMETODE

$$\begin{array}{lllll} x_0 & & & & \\ x_1 & = & rx_0 & & \\ x_2 & = & rx_1 & = & r(rx_0) = r^2 x_0 \\ x_3 & = & rx_0 & = & r(r^2 x_0) = r^3 x_0 \end{array}$$

Differenslikninger
↘Homogene
↘ 1. Orden
↘ 2. Orden
↘Inhomogene
↘ 1. Orden
↘ 2. Orden

1. orden
$x_{n+1} = rx_n, x_n = Cr^n, C\epsilon\mathbb{R}$
2. orden
$x_{n+2} = bx_{n+1} + cx_n = 0$
Karakteristisk likning:
$r^2 + br + c = 0$

1. orden
$x_{n+1} - rx_n = f(n)$
$x_n = x_n^s + x_n^h$
2. orden
$x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = f(n)$
$x_n = x_n^s + x_n^h$

To reelle røtter $r_1 og\ r_2$
$x_n = Cr_1^n + Dr_2^n, C, D\epsilon\mathbb{R}$

Én reell rot r_1
$x_n = Cr_1^n + Dnr_1^n, C, D\epsilon\mathbb{R}$

To komplekse røtter $r_1$og $\overline{r_1}$
Kompleks form: $x_n = Er_1^n + \overline{Er_1^n}, E\epsilon\mathbb{C}$
Reell form: $x_n = C\rho^n \cos(n\theta) +$
$D\rho^n \sin(n\theta)\ der\ r_1 = \rho e^{i\theta}, C, D\epsilon\mathbb{R}$

Eksakte cosinus og sinus:

x_n^s: Spesiell løsning. Her må vi gjette på samme form som f(n) (polynom)
x_n^h: Løsningene av den assosierte homogene differenslikningen

Inhomogen 2. Ordens Differenslikninger.
Eksempel: $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = n + 2$
Løses slik:
1. Begynner med å løse den homogene: ...=0
$x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$
Karakteristisk polynom: $R^2 + 5R + 6 = 0$
$R_1 = -3$ $R_2 = -2$
Generell homogen løsning:
$X_n^h = C(-2)^n + D(-3)^n$
2. Én løsning av inhomogen

Prøver med $X_n^s = an + b$
$X_{n+2}^s = 5x_{n+1} + 6_n^s = a(n+2)b + 5(a(n+1) + b) + 6(an + b)$
= $an + 2a + b + 5an + 5a + 5b + 6an + 6b$
= 12an + 7a + 12b = n + 2 (tvinger det til å bli n+2, og det gjelder for alle n)
$\boxed{12a}n + \boxed{7a + 12b} = \boxed{1}n + \boxed{2}$
: . : .
12a = 1, 7a+12b = 2
$a = {}^{1}/_{12}, b = {}^{17}/_{144}$
$X_n^s = \frac{n}{12} + \frac{17}{144}$ 🡐 Spesiell løsning
3. $x_n = ((-2)^n + D(-3)^n + \frac{1}{12}n + \frac{17}{144}$ 🡐 Generell løsning
4. Spesiell løsning med initialverdiene:
$X_0 = ((-2^0) + D(-3)^0 + \frac{1}{12} * 0 + \frac{17}{144} = C + D + \frac{17}{144}$
$X_0 = \frac{17}{144}, x_1 = -\frac{115}{144}$
$X_0 = C + D + \frac{17}{144} = \frac{17}{144}$
$X_1 = C(-1)^1 + (-C)(-3)^1 + \frac{1}{12} + \frac{17}{144} = C + \frac{29}{144} = -\frac{115}{144}$
$C = -\frac{115}{144} - \frac{29}{144} = -1$
$X_n = -(-2)^n + (-3)^n + \frac{n}{12} + \frac{17}{144} = 2^n - 3^n + \frac{n}{12} + \frac{17}{144}$
$X_n = -1^n + \frac{12n}{144} + \frac{17}{144}$

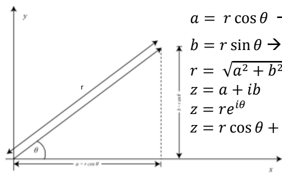
Den generelle løsningen til en første ordens lineær homogen differenslikning $x_{n+1} = rx_n$er følgene $x_n = Cr^n, C\epsilon\mathbb{R}$

Førsteordens homogen differenslikning:

::Eksempel:
Likningen $3X_{n+1} = 2x_n\ n \geq 0$
Er en første ordens lineær homogen differenslikning siden den kan skrives på formen $x_{n+1} = rx_n\ n \geq 0$ slik:
$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n$ De to første leddene i denne følgen er x_0 og $x_1 = \frac{2}{3}x_0$. En mulig løsning av likningen kan derfor starte med leddene 1 og $\frac{2}{3}$ (når $x_0 = 1$), mens en annen løsning kan starte med leddene 3 og 2 (når $x_0 = 3$).
::Eksempel:
Likningen $X_{n+1} = 2x_n\ n \geq 0$
Er en første ordens lineær homogen differenslikning. Leddene i følgene som oppfyller denne likningen fås ved å multiplisere det umiddelbart foregående leddet med 2. Hvis vi starter med $x_0 = 1$, får vi: 1,2,4,8,16,...
::Eksempel:
$3X_{n+1} = 2x_n\ n \geq 0$
$X_{n+1} = C\left(\frac{2}{3}\right)x_n\ n \geq 0$
Og trenger en C for å få et svar.

Anta at $\{x_n^s\}$ er en spesiell løsning av den første ordens lineære inhomogene differenslikningen $x_{n+1} - rx_n = f(n)$
Da vil den generelle løsningen av denne være $x_n = x_n^s + x_n^h$, der $\{x_n^h\}$ er den generelle løsningen av den assosierte homogene likningen
$x_n^h - rx_n^h = 0$

Kartesisk \ polar:



$a = r\cos\theta$ → $\cos\theta = \frac{a}{r}$
$b = r\sin\theta$ → $\sin\theta = \frac{b}{r}$
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$z = a + ib$
$z = re^{i\theta}$
$z = r\cos\theta + i\sin\theta$

::Eks:
Et komplekst tall z har polarkoordinater r = 6 og $\theta = \frac{7\pi}{3}$. Finn tallet.
Vi legger først merke til at $\frac{7\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$. Ifølge formlene er
$a = 6\cos\frac{7\pi}{3} = 6cos\frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \quad b = 6\sin\frac{7\pi}{3} = 6\sin\frac{\pi}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$
Så det komplekse tallet blir $z = 3 + 3\sqrt{3}\,i$

::Eks:
Finn polarkoordinatene til det komplekse tallet $-\sqrt{3} + i$
Lengden r er gitt ved $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$
Og vinkelen θ er bestemt ved $\cos\theta = \frac{a}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ og $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{2}$

Dersom et komplekst tall $z = a + ib$ har polarkoordinater (r, θ), så kaller vi r for modulus til z for et argument til z. Modulusen kalles også for tallverdien eller absoluttverdien til z, og betegnes gjerne med $r = |z|$, som gir oss $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Legg merke til at et komplekst tall bare har én modulus, men uendelig mange argumenter.
Legg også merke til at $|z|^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z}$.

GAUSS-JORDAN ELIMINASJON

Oppskrift på å redusere en (ikke null-)matrise til trappeform
1. Finn første kolonne (fra venstre) som ikke bare har 0-ere
2. Hvis kolonnen du fant i 1) har 0 i første rad, bytt første rad med en annen rad slik at komponenten i første rad i kolonnen fra 1) er forskjellig fra 0.
3. La a være komponenten i første rad i kolonnen fra 1). Multipliser første rad med $\frac{1}{a}$ for å lage en ledende 1-er.
4. Legg til et passende multiplum av første rad til radene under slik at alle komponentene under den ledende 1-eren du laget i 3) blir 0.
5. Dekk over første rad og første kolonne og start på 1) med matrisen som gjenstår. Fortsett slik helt til du er ferdig med alle radene. Matrisen du står igjen med er da på trappeform.
6. Start fra bunnen av matrisen med første rad nedenfra som ikke bare har 0-ere, og jobb oppover rad for rad: For hver rad med en ledende 1-er, legg til et passende multiplum av raden til radene over denne for å få bare 0-ere over den ledende 1-eren.

For hver gang vi gjør noe med matrisen pleier vi å skrive symbolet ~ og vi oppgir gjerne hva vi har gjort.
::Eksempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\begin{matrix} -2\,R_1 til\ R_2 \\ -2\,R_1 til\ R_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\tfrac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-3\,R_2\ til\ R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-1\,R_2\ til\ R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\begin{matrix} -\frac{11}{2}R_3 til\ R_1 \\ \frac{7}{2}\,R_3 til\ R_2 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

OPPGAVER FRA PRØVEEKS

$x_{n+1} + 0.6x_n = 1$, hva skjer når $n \to \infty$?
$x_n = x_n^s + x_n^h$
x_n^h: $x_{n+1}^h + 0.6x_n^h = 0$
$x_{n+1}^h = -0.6x_n^h$
$x_n^h = C(-0.6)^n$, $C \in \mathbb{R}$
x_n^s: Gjetter $x_n^s = A$, A er en konstant.
$x_{n+1}^s - 0.6\,x_n^s \to A + 0.6A = 1$:setter inn tallet 1.
$1.6A = 1 \to A = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$
$x_n = x_n^s + x_n^h = \frac{5}{8} + C(-0.6)^n, \ \ C \in \mathbb{R}$
Når $n \to \infty$, går X_n mot $\frac{5}{8}$, fordi 0.6 er mindre enn 1, og leddet går mot 0..

2. Ordens homogen med to initialverdier. Hva er X_{101}?
$X_{n+2} - X_{n+1} + X_n = 0, \ X_0 = 1, X_1 = 1$
Kar Pol: $R^2 - R + 1 = 0 \ \to \ \ R = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$
Velger den med pluss: $r_1 = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$
$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$
$\left.\cos\theta = \frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\theta = \frac{\pi}{3}$
$r_1 = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$
$X_n^h = C * 1^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + D * 1^n \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$
$X_0 = C * 1 + 0 = 1 \to C = 1$
$X_1 = C * \frac{1}{2} + D * \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \to bruker\ C = 1$
$X_1 = 1 * \frac{1}{2} + D * \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \to D = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$X_n = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$

$X_{101} = \cos\left(\frac{\pi}{3}101\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}101\right)$

$\frac{101\pi}{3} = \frac{99\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 32\pi + \pi + \frac{2\pi}{3}$ tilsvarer $\frac{5\pi}{3}$

$X_{101} = \cos\frac{5\pi}{3} + \frac{\sqrt3}{2}\sin\frac{5\pi}{3} = \frac12 + \frac{1}{\sqrt3}\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right) = \frac12 - \frac12 = 0.$

LUREOPPGAVE:

$X_{n+2}+X_{n+1}+X_n = 0,\ X_0 = 1, X_1 = 1$ Hva er $X_{678}+X_{679}+X_{680}$? Null!

DIFFERENSIALLIKNINGER

FØRSTE ORDENS LINEÆRE DIFFS

Løsning for $y' + f(x)y = g(x)$ på intervall I, f og g er kontinuerlige på I.

1 Integrer $f: f' = F$

2 Multipliser likningen med faktoren $e^{F(x)}$.

$e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = e^{F(x)}g(x)$

3 Se at $e^{F(x)}y' + e^{F(x)}f(x)y = \left(e^{F(x)}y\right)'$ ved bruk av produktregelen.

Derfor blir $\left(e^{F(x)}y\right)' = e^{F(x)}g(x)$ likningen vår.

4 Integrerer og får $e^{F(x)}y = \int e^{F(x)}g(x)\ dx + C$. C-en er viktig!

5 Dermed har vi funnet uendelig mange løsninger på intervallet I:

$y(x) = e^{-F(x)}\int e^{F(x)}g(x)\ dx + Ce^{-F(x)}$

Greit å huske at man multipliserer med integrerende faktor og gjenkjenner venstresiden som den deriverte av et produkt.

SEPARABEL DIFFLIKNING

1 Integrer med hensyn på x på begge sider. Etter å ha satt y=x

$\int p(y(x))y'(x)\,dx = \int q(x)\,dx$

2 Substituerer $y = y(x)$ i integralet på venstre side (mest praktisk å bruke samme bokstav). Det gir $y'(x)dx = dy$, dermed

$\int p(y)\,dy = \int q(x)\,dx$

3 Vi kan forhåpentligvis integrere på begge sider, så sammen integrasjonskonstantene og løse ut for y.

ANDRE ORDENS LINEÆRE HOMOGENE DIFFS MED KONSTANTE KOEFFS

Løsning av $y''+by'+cy=0$

1 Finn Kar. Pol: $r^2+br+c=0$

2 Løsningene vil avhenge av annengradslikningens løsninger:

A to reelle røtter, $r_1 og\ r_2$ gir løsningsformel $y(x) = Ce^{r_1x}+De^{r_2x}$

B én reell rot gir: $y(x) = Ce^{r_1x}+Dxe^{1x}$

C To komplekse; $r_1 = a+id$ og $\overline{r_1} = a - id$ gir løsningen:

$y(x) = e^{ax}(C\cos(dx)+D\sin(dx)),\ C,D\in\mathbb{R}$

DIFFLIKNINGSSEKSEMPLER!

FØRSTE ORDENS EKSEMPLER

1 Første ordens lineær $y'+3y=4$. Her er $f(x) = 3$ og $g(x)=4$

Finner integrerende faktor $e^{F(x)} = e^{3x}$.

$e^{3x}y' + 3ye^{3x} = 4e^{3x} \rightarrow (e^{3x}y)' = 4e^{3x} \rightarrow ye^{3x} = \frac43 e^{3x}+C$

Så $y = \frac{\frac43 e^{3x}+C}{e^{3x}} = \frac43 + Ce^{-3x}$ fordi $\frac{1}{e^{3x}} = e^{-3x}$.

Gitt initialbetingelsen $y(0) = 0$ har vi at

$y(0) = \frac43 + Ce^{-3*0} = 0 \rightarrow \frac43 = C$ som gir $y(x) = \frac43 + \frac43 e^{-3x}$

2 Første ordens: $xy' - 2y = -2,\ x\in\mathbb{R}$. Vil ha likningen på formen $y'+f(x)y = g(x)$. Antar at $x\neq0$, så vi deler på x: $y' - \frac{2y}{x} = -\frac2x$.

Finner så integrerende faktor: $\int -\frac2x = -2\int\frac1x = -2\ln|x| = \ln(x^{-2})$

Altså $e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2}$, som ganges inn i likningen:

$y'x^{-2} + -\frac{2y}{x}x^{-2} = -\frac2x x^{-2} \rightarrow \frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} = -\frac{2}{x^3}$ som vi gjenkjenner som

$\left(\frac{y}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3} \rightarrow \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^2}+C.\ y(x) = 1+Cx^2,\ C\in\mathbb{R}$ pga $*x^2$

Men siden vi antok at $x\neq0$, merker vi oss at y er deriverbar i $x=0$ og at y er en løsning av difflikningen også når $x = 0$, dvs løsningene vi har kommet frem til gjelder for hele $\mathbb{R}$.

3 $xy'-y=x^2$. Må anta $x\neq0$. $\rightarrow y' - \frac yx = x$. Integrerende faktor altså

$e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|} = \begin{cases}\frac1x & x>0\\ -\frac1x & x<0\end{cases}$ Beholder vi absoluttverditegnet får vi

$\frac{y'}{|x|} - \frac{1}{|x|x}y = \frac{x}{|x|} \rightarrow \left(\frac{y}{|x|}\right)' = \frac{x}{|x|} \rightarrow \frac{y}{|x|} = |x|+C \rightarrow y(x) = |x|^2 + C|x|, C\in\mathbb{R}$

Vi får altså løsningen $y(x) = x^2 + C|x|$, eller kan løse opp absoluttverditegnet så vi får to løsninger

$x>0$	$x<0$
$\frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 1 \quad \left(\frac yx\right)' = 1$	$-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2} = -1 \quad \left(\frac yx\right)' = 1$
$\frac yx = x + C_1$	$\frac yx = x + C_2$
$y(x) = x^2+C_1x$	$y(x) = x^2+C_2x$

Uansett, setter vi disse sammen får vi $y(x) = \begin{cases} x^2+C_1x & x>0\\ x^2+C_2x & x<0\end{cases}$

Hvis vi skal kunne definere y(0) slik at y'(0) også eksisterer, er det slik at vi må ha at $\lim x\rightarrow 0^-\ y'(x) = \lim x\rightarrow 0^+\ y'(x)$, som da vil være lik $y'(0)$. Siden den første grenseverdien er C_1, mens den andre er C_2, må $C_1 = C_2$.

Dermed har vi løsningene til $xy'-y=x^2$: $y(x) = x^2 + Cx, C\in\mathbb{R}$.

ANDRE ORDENS EKSEMPLER

1 $y''-5y'+4y=0$ har kar.pol. $r^2-5r+4=0$, som gir $r=4 \vee r=1$.

Vi bruker dermed formelen for to reelle røtter, og får $y(x) = Ce^{4x}+De^x$.

2 $4y''-4y'+y=0$ har kar.pol. $4r^2-4r+1=0$, som gir kun én $r=\frac12$

$y(x) = Ce^{\frac x2} + Dxe^{\frac x2}$

3 $y''-4y'+85y=0$. har kar.pol. $r^2-4r+85=0$, som gir $r = 2\pm 9i$

Løsningen er altså $y(x) = e^{2x}(C\cos 9x + D\sin 9x)$

INITIALBETINGELSEEKSEMPLER

$y' = -x^2 - x$ er separabel, og gir løsningene $y(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$ som generell løsning. Blir vi gitt $y(0) = 0$, kan vi sette $0 = -\frac03 - \frac02 + C = 0 = C$

$C = 0$ gir spesiell løsning $y(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.

EKSEMPEL: MØLLKULEFORDAMPING

A $M'(t) = -kM(t)^{\frac23}$. M er masse i gram ved døgn t. Finn $M(t)$ når $M(0) = 1$.

$M' = -kM^{\frac23}$ er separabel, ikke-lineær. $\frac{1}{M^{\frac23}} * M' = -k \rightarrow M^{\frac23}\frac{dM}{dt} = -k$.

$\int M^{\frac23} dM = \int -k\ dt \rightarrow \frac{1}{1+\left(-\frac23\right)}M^{1+\left(-\frac23\right)} = -kt + C \rightarrow \frac{1}{\frac13} = 3$, så

$3M^{\frac13} = -kt + C. \rightarrow M^{\frac13} = \frac{-kt+C}{3} \rightarrow M(t) = \left(-\frac k3 t + C\right)^3$. Siden $M(0) = 1$,

$M(0) = 1 = C^3 \rightarrow C = 1$. Spesiell løsning er derfor $M(t) = \left(1 - \frac k3 t\right)^3$

B Hvor lang tid tar det før møllkula er borte, forutsatt at $M(75) = \frac12$?

Skal finne k: $M(75) = \frac12 = \left(-\frac k3 * 75 + 1\right)^3 \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{\frac13}} = 2^{-\frac13} \rightarrow$

$-25k = 2^{-\frac13} - 1 \rightarrow k = -\frac{3}{75}\left(2^{-\frac13}-1\right) \approx 0.00825$, så $M(t) = 0$:

$M(t) = 0 \approx \left(-\frac{0.00825}{3}t + 1\right)^3 \rightarrow t \approx 363{,}64$ døgn.

$y''+3y'+4y=0$ gir Kar. Pol: $r^2+3r+4=0$; med røtter $r = -\frac32 \pm \frac{\sqrt7}{2}i$.

$y(x) = e^{-\frac32 x}\left(C\cos\frac{\sqrt7}{2}x + D\sin\frac{\sqrt7}{2}x\right)$ kan like godt deriveres med en gang:

$y(x) = -\frac32 e^{-\frac32 x}\left(C\cos\left(\frac{\sqrt7}{2}x\right) + D\sin\left(\frac{\sqrt7}{2}x\right)\right) +$

$e^{-\frac32 x}\left(-C\sin\left(\frac{\sqrt7}{2}x\right)\frac{\sqrt7}{2} + D\cos\left(\frac{\sqrt7}{2}x\right)\frac{\sqrt7}{2}\right)$ Må gange med kjernen!

$y'(0) = \left(-\frac32\right)(C) + \frac{\sqrt7 D}{2}$

RADIOAKTIVITET

$\frac{dy}{dt} = -\lambda y$ eller $\frac{y'}{y} = -\lambda$. Som er en separabel diff. $\int\frac{dy}{y} = -\int\lambda\ dt$.

$\ln|y| = -\lambda t + C \rightarrow |y| = e^{-\lambda t + C} = Ce^{-\lambda t}. \rightarrow y = \pm Ce^{-\lambda t} = Ce^{-\lambda t}, C\in\mathbb{R}$

Ved $t=0$: $y(0) = C$. Derfor, ved halvert tid, $y = Ce^{-\lambda T_{\frac12}} = \frac C2$. Tar bort C:

$2 = e^{-\lambda t} \rightarrow \ln\frac12 = -\lambda T_{\frac12}$, som gir $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{\frac12}}$, som settes inn i likningen:

$y = y_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{\frac12}}t}$, som $= y_0(e^{\ln 2})^{-\frac{t}{T_{\frac12}}} = y_0 2^{-\frac{t}{T_{\frac12}}} = y_0\frac12^{\frac{t}{T_{\frac12}}}$. Halvering ved $t = T_{\frac12}$

$y'+2xy = x \rightarrow$ ganger IntF: $e^{x^2}y' + e^{x^2}2xy = e^{x^2}x \rightarrow \left(e^{x^2}y\right)' = \int xe^{x^2}$

$e^{x^2}y = \frac12 e^{x^2} + C$, og til slutt $y(x) = \frac12 + Ce^{-x^2}$.

$y'+y = e^x \rightarrow$ ganger IntF: $y'e^x + ye^x = e^{2x} \rightarrow (e^xy)' = \int e^{2x} \rightarrow$

$e^xy = \frac12 e^{2x} + C$. Derfor, $y = \frac12 e^x + Ce^{-x}$

DERIVASJONSREGLER

$f(x)$	$f'(x)$	a	0
x^n	nx^{n-1}	e^x	e^x
e^{-2x}	$-2e^{-2x}$	a^x	$\ln a * a^x$
$\ln x$	$\frac1x$	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$-nx^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$
Cx	C	$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$		

$Cf(x)$	$Cf'(x)$	$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$
$f(x)*g(x)$	$f'(x)*g(x)+f(x)*g'(x)$		
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)*g(x)-f(x)*g'(x)}{g(x)^2}$		
$f(g(x))$	$f'(g(x))*g'(x)$		

$(\tan x)' \quad \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x(\sin x)' - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}$

$\frac{\cos x\cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\frac{d}{dx}\left(\ln\sqrt x\right)^2 \quad 2\left(\ln\sqrt x\right) * \frac{1}{\sqrt x} * \frac{1}{2\sqrt x}$

$= 2\ln(\sqrt x) * \frac1x * \frac12 = ln\sqrt x * \frac1x$

$= \frac{\ln x}{2} * \frac1x = \frac{\ln x}{2x}$

INTEGRASJON SUBSTITUSJON

$\int x\cos(x^2)\,dx = \frac12\int 2x\cos(x^2)\,dx$ Gjør om for å få inn $\int 2x = x^2$

$\frac12\sin x^2 + C$

$\int x\cos x^2\ dx = \int\cos x^2\ x\ dx$

$\frac12\int\cos\underbrace{(x^2)}_{u}\underbrace{2x\,dx}_{du}$ [subsitusjonsboksen: $u = x^2$, $du = 2x\,dx$]

$\frac12\sin u + C = \frac12\sin x^2 + C$

$\int\tan x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}dx$ [subsitusjonsboksen: $u = \cos x$, $du = -\sin x\ dx$]

$= -\int\frac{-\sin x dx}{\cos x} = -\int\frac{du}{u}$

$= \ln|u| + C = \ln|\cos x| + C$

$\int 5x^2e^{x^3}dx$, der x^3er kjerne, [subsitusjonsboksen: $u = x^3$, $du = 3x^2\,dx$]

$\frac53\int e^{x^3}3x^2\,dx = \frac53\int e^u du = \frac53 e^{x^3} + C$

DELVIS INTEGRASJON

$\int xe^x\ dx = uv - \int u'v = xe^x - e^x + C$ [delintboksen: $u = x$, $u' = 1$, $v = e^x$, $v' = e^x$]

$\int x\cos x\,dx$

$x\sin x - \int 1\sin x\,dx$ [delintboksen: $u = x$, $u' = 1$, $v = \sin x$, $v' = \cos x$]

$x\sin x + \cos x + C$

$\int\ln x\ dx$

$\int 1\ln x\ dx$ [delintboksen: $u = \ln x$, $u' = \frac1x$, $v = x$, $v' = 1$]

$= x\ln x - \int 1 = x\ln x - x + C$

Prøve på svaret

$\frac{d}{dx}(x\ln x - x + C) = 1\ln x + x\frac1x - 1$

$= \ln x + 1 - 1 = \ln x$

DELBRØKOPPSPALTNING

$\frac{1}{x(1-x)} = \frac Ax + \frac{B}{1-x} = \frac{(1-x)A}{x(1-x)} + \frac{Bx}{x(1-x)}$. Krever at $\frac{(1-x)A+Bx}{x(1-x)} = \frac{A-Ax+Bx}{x(1-x)}$, så

$A - Ax + Bx = 1 = A - x(A-B)\quad A = 1,\ x(A-B) = 0 \rightarrow A = B = 1$

Derfor $\frac{1}{x(1-x)} = \frac1x + \frac{1}{1-x}$ :::: $\int\frac{dx}{x(1-x)} = \int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{1-x} = \ln|x| - \ln|1-x| + C$

$\frac{1}{x(2-x)} = \frac Ax + \frac{B}{2-x} = \frac{(2-x)A}{x(2-x)} + \frac{Bx}{x(2-x)} = \frac{(2-x)A+Bx}{x(2-x)}$

$x = 0 \rightarrow 1 = 2A \rightarrow A = \frac12$

$x = 2 \rightarrow 1 = 2B \quad B = \frac12$

$\frac{1}{x(2-x)} = \frac12\left(\frac1x + \frac{1}{2-x}\right)$

$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac Ax + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2)+B(x(x-2))+Cx(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$

$B = -1$

$x = 1 \quad 1 = -B$

$x = 0 : 1 = A(-1)(-2) : \quad A = \frac12$

$x = 2 \quad 1 = 2C \quad C = \frac12$

$\frac{1}{x(x-1)(x-2)} = \frac12 * \frac1x + \frac{-1}{x-1} + \frac12 * \frac{1}{x-2}$

SEPARABLE DIFFLIKNINGER

$y' = \frac{dy}{dt} = f(y)*g(t)$. Separer y og t:

$\frac{dy}{f(y)} = g(t)\ dt$ og integrer begge sider

$\int\frac{dy}{f(y)} = \int g(t)\ dt$ og beregn begge integraler

$y = y(x) =$ en funksjon som er lik sin egen deriverte (e^x)

$\frac{dy}{dx} = y$ er separabel fordi $\frac{dy}{y} = dx. \rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int dx$

$\ln|y| = x + C \rightarrow e^{\ln|y|} = e^{x+C} = e^xe^C = |y| = Ce^x$, fordi $e^C = C$

$y < 0:\ y = Ce^x$

$y > 0: y = -Ce^x$ der –y er et positivt tall, så $y = Ce^x$ for alle C.

PRØVEEKSAMEN

1A $F(x) = \int xe^x \rightarrow xe^x - \int 1*e^x = xe^x - e^x + C2$

1B $y' + \frac1x y = e^x :: x > 0, y(1) = 1 \rightarrow e^{-\int\frac1x dx}\int e^x e^{\int\frac1x dx}$

$= \frac1x(xe^x - e^x + C) = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac Cx$ (?) Blir generell løsn. Spes for $y(1) = 1$

$y(1) = 1 = e^1 - \frac{e^1}{1} + \frac C1 = e - e + C = 1 \rightarrow y(x) = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac1x$. Prøve på:

$y'(x) = e^x - \frac{xe^x - e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}$ :: $\frac1x y = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2}$

$y' + \frac1x y = e^x - \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = e^x$. Jess.

2. $M = \begin{bmatrix}0&2&\alpha\\1&-1&1\\2&-1&2\end{bmatrix}$. Hvilken α gir egenverdi 0? To måter:

I: Regner ut egenverdiene vha karakteristisk polynom; $det(M-\lambda I)$:

$\begin{vmatrix}0&2&\alpha\\1&-1&1\\2&-1&2\end{vmatrix} = -\lambda(-1-\lambda)(2-\lambda) + 4 - \alpha - \alpha(-1-\lambda) * 2 - 1(-1)(-\lambda) - (2-\lambda)*2*1$

$= -\lambda^3 + \lambda^2 + (3+2\alpha)\lambda + \alpha = 0$. Egenverdi $\lambda = 0$, betyr at den ikke har et konstantledd α. Derfor må $\alpha = 0$.

II: Determinanten til M er produktet av egenverdiene. Det betyr at hvis det $M = 0$ er en $\lambda = 0$. $Det\ M = \alpha$. Derfor er $det\ M = 0 = \alpha$.

3A $y'' + 3y' + \frac52 y = 0$ gir Kar.Pol: $r^2+3r+\frac52 = 0, r = -\frac32 \pm \frac i2$ Generell:

$y(x) = e^{-\frac32 x}\left(C\cos\frac x2 + D\sin\frac x2\right)$ B spesiell løsning med $y(0) = 1, y'(0) = 0$:

$1 = y(0) = C$. Settes inn og deriverer

$y'(x) = -\frac32 e^{-\frac32 x}\left(\cos\frac x2 + D\sin\frac x2\right) + e^{-\frac32 x}\left(-\frac12\sin\frac x2 + \frac12 D\cos\frac x2\right)$. Kan omgjørs

$$y'(x) = e^{-\frac32 x}\left(-\frac32\cos\frac x2 - \frac32 D\sin\frac x2 - \frac12\sin\frac x2 + \frac12 D\cos\frac x2\right)$$

$y'(0) = 0 - \frac32 + \frac D2 \rightarrow D = 3$, som igjen gir spes $y = e^{-\frac32 x}\left(\cos\frac x2 + 3\sin\frac x2\right)$.

4 Separabel DL $\frac{dy}{dt} = \lambda y(A-y), \lambda > 0, 0 < y < A$. Separer og integrer!

$\frac{dy}{y(A-y)} = \lambda\ dt \rightarrow \int\frac{dy}{y(A-y)} = \int\lambda\ dt$ som åpner for delbrøksoppspaltning:

$\int\frac{\alpha}{y} + \frac{\beta}{A-y} \rightarrow \int\frac{\alpha(A-y)+\beta y}{y(A-y)} = \int\frac{\alpha A + (\beta-\alpha)y}{y(A-y)} :: \alpha A = 1$ og $\beta - \alpha = 0, \alpha = \frac1A = \beta$.

Det gir $\int\frac1A\left(\frac1y + \frac{1}{A-y}\right)dy = \frac1A\int\left(\frac{dy}{y}\right) + \frac1A\int\left(\frac{dy}{A-y}\right) = \frac1A\ln y \dot{-} \frac1A\ln(A-y)$

$= \frac1A\ln\frac{y}{A-y}$. Rydder: $\frac1A\ln\frac{y}{A-y} = \lambda t + C \rightarrow \ln\frac{y}{A-y} = A\lambda t + C \rightarrow \frac{y}{A-y} = Ce^{A\lambda t}$.

$y = (A-y)Ce^{A\lambda t} = ACe^{A\lambda t} - yCe^{A\lambda t} \rightarrow y + yCe^{A\lambda t} = ACe^{A\lambda t} \rightarrow$

$y(1+Ce^{A\lambda t}) = ACe^{A\lambda t} \rightarrow y = \frac{ACe^{A\lambda t}}{1+Ce^{A\lambda t}}$ Er vår generelle løsning!

B setter inn for $y(0) = 0 = \frac{AC}{1+C} = \frac A2$ved kryssmult? $2AC = (1+C)A$ eller

$2C = 1 + C \rightarrow C = 1$. Spesiell løsning $y = \frac{Ae^{A\lambda t}}{1+eA\lambda t}$. C hva når $n\rightarrow\infty$? Deler oppe og nede med $e^{A\lambda t}$ for mer synlig konvergens $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{A}{1+\underbrace{e^{-A\lambda t}}_{\rightarrow 0}} = \frac{A}{0+1} =$

A.

$y''+3y'+4y = 0$ gir $r^2+3r+4 = 0;\ r = \frac32 \pm \frac{\sqrt7}{2}i;$

$e^{\frac32 x}\left(C\cos\frac{\sqrt7 x}{2} + D\sin\frac{\sqrt7 x}{2}\right)$ Generell løsning. Med initialbetingelser

$y(0) = \frac{3\pi}{4}, y'(3) = \frac\pi3; y(0) = C = \frac{3\pi}{4}$.

$y'(x) = \frac32 e^{\frac32 x}\left(\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\sqrt7 x}{2} + D\sin\frac{\sqrt7 x}{2}\right) + e^{\frac32 x}\left(-\frac32 * \frac{3\pi}{4}\sin\frac{\sqrt7 x}{2} + \frac32 D\cos\frac{\sqrt7 x}{2}\right) = \frac\pi3$.

$y'(0) = \frac32\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \left(\frac32 D\right) = \frac\pi3 = \frac32\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \left(\frac32 D\right) = \frac{9\pi}{8} + \frac{3D}{2}\Big| * 8 \rightarrow 9\pi + 12D \rightarrow$

$12D = -9\pi \rightarrow D = -\frac{9\pi}{12}$ gir spesiell løsning $e^{\frac32 x}\left(\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\sqrt7 x}{2} - \frac{9\pi}{12}\sin\frac{\sqrt7 x}{2}\right)$

SUBSTITUSJON

$\int x^2e^{-4x^3}dx$. Sett $u = -4x^3$, så $du = -4*3x^2dx = -12x^2dx$. Løs for x^2

$x^2dx = -\frac{1}{12}du \rightarrow \int x^2e^{-4x^3}dx = \int e^u * -\frac{1}{12}du \rightarrow -\frac{1}{12}\int e^u du$

$= -\frac{1}{12}e^u + C = -\frac{1}{12}e^{-4x^3} + C$.

DIFFERENSLIKNINGER 101:

1. Ordens homogen: $x_{n+1} = rx_n$ har følgene $x_n = Cr^n, C\in\mathbb{R}$ som løsninger.
   Inhomogen: ordens: $x_{n+1} - rx_n = f(n)$ løses ved $x_n = x_n^s + c_n^h$, eller gen+spes: Finner gen. løsning til homogen, og finner spes hvor vi gjetter på same grad som $f(n)$. $x_n^s = A_kn^k + A_{k-1}n^{k-1} + \cdots + A_1n + A_0$. Inits?
2. $x_{n+2}+bx_{n+1}+cx_n = 0, n\geq0, b,c\in\mathbb{R}, c\neq0$, KarPol $r^2+br+c = 0$
   a. To reelle røtter $r_1$og r_2 gir $x_n = Cr_1^n + Dr_2^n, C,D\in\mathbb{R}$
   b. Én reell rot r_1 gir $x_n = Cr_1^n + Dnr_1^n, C,D\in\mathbb{R}$ husk n i D her.
   c. To komplekse røtter $r_1$og $\overline{r_1}$gir $x_n = Er_1^n + \overline{Er_1}^n, E\in\mathbb{C}$
      Eventuelt $x_n = C\rho^n\cos(n\theta) + D\rho^n\sin(n\theta), C,D\in\mathbb{R}, r_1 = \rho e^{i\theta}$

EKS: $x_n = E(1+i)^n + \overline{E}(1-i)^n$ mod og arg gir $\rho = \sqrt2$ og $\theta = \frac\pi4$, så

$$x_n = C(\sqrt2)^n\cos\left(\frac\pi4 n\right) + D(\sqrt2)^n\sin\left(\frac\pi4 n\right)$$